



Politecnico di Torino - DAUIN

TEORIA DELLA STIMA SET MEMBERSHIP

Michele TARAGNA

*Dipartimento di Automatica e Informatica
Politecnico di Torino*

**Corso di III Livello
“Experimental modeling:
costruzione di modelli da dati sperimentali”**



Esempio #1: stima del valore di resistenza di un resistore reale

Si effettuano N misure di tensione-corrente, supponendo che:

- la caratteristica statica del resistore sia lineare e quindi il modello del dispositivo sia dato dalla legge di Ohm

$$v_R = R \cdot i_R$$

- le misure siano corrotte da un rumore non noto

$$e = [e_1, \dots, e_N]^T$$

Si ottiene così il sistema lineare di equazioni:

$$\begin{aligned}v_{R,1} &= R \cdot i_{R,1} + e_1 \\v_{R,2} &= R \cdot i_{R,2} + e_2 \\&\vdots \\v_{R,N} &= R \cdot i_{R,N} + e_N\end{aligned}$$



In forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_{R,1} \\ v_{R,2} \\ \vdots \\ v_{R,N} \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} i_{R,1} \\ i_{R,2} \\ \vdots \\ i_{R,N} \end{bmatrix}}_L \cdot \underbrace{[R]}_{\nu^*} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}}_e$$

è nella forma standard:

$$\boxed{\underbrace{y}_{\substack{\text{dati} \\ \text{noti}}} = \underbrace{F(\nu^*)}_{\substack{\text{funzione} \\ \text{nota}}} + \underbrace{e}_{\substack{\text{rumore} \\ \text{non noto}}}}$$

con:

$$F(\nu^*) = L \cdot \nu^* = \text{funzione lineare del parametro non noto } \nu^*$$

Obiettivo: trovare una stima \hat{R} di R mediante un algoritmo di stima (stimatore) ϕ applicato al vettore dei dati y :

$$\hat{R} = \phi(y) \cong R$$



Esempio #2: stima dei parametri di un modello ARX (n_a, n_b)

$$\underbrace{y_j - a_1 y_{j-1} - a_2 y_{j-2} - \dots - a_{n_a} y_{j-n_a}}_{\text{parte autoregressiva (AR)}} = \underbrace{b_1 u_{j-1} + b_2 u_{j-2} + \dots + b_{n_b} u_{j-n_b}}_{\text{variabile esogena (X)}} + e_j, \quad j = 1, \dots, N'$$

\Downarrow

$$y_j = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y_{j-i} + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u_{j-i} + e_j, \quad j = 1, \dots, N'$$

\Downarrow

$$\nu^* = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b}]^T \in \mathbb{R}^r, \quad r = n_a + n_b$$

$$y = [y_{n_a+1} \ y_{n_a+2} \ \dots \ y_{N'}]^T \in \mathbb{R}^N, \quad N = N' - n_a$$

\Downarrow

$$y = L \cdot \nu^* + e$$

$$L = \begin{bmatrix} y_{n_a} & \dots & y_1 & u_{n_a} & \dots & u_{n_a+1-n_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N'-1} & \dots & y_{N'-n_a} & u_{N'-1} & \dots & u_{N'-n_b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times r}$$



Errori di stima dei minimi quadrati

ν^* : parametri “veri” che hanno generato il vettore dei dati y
Per effetto del rumore di misura, $y \neq L\nu^*$

⇓

$$y = L\nu^* + e$$

↙

incertezza

⇓

usando come stimatore l’algoritmo dei minimi quadrati:

$$\begin{aligned}\hat{\nu} &= (L^T L)^{-1} L^T y = (L^T L)^{-1} L^T (L\nu^* + e) = \\ &= \underbrace{(L^T L)^{-1} L^T L}_{I} \nu^* + (L^T L)^{-1} L^T e = \\ &= \nu^* + (L^T L)^{-1} L^T e\end{aligned}$$

⇓

$$\hat{\nu} - \nu^* = (L^T L)^{-1} L^T e = \text{errore di stima}$$

- e non è noto esattamente, ma si possono fare ipotesi su e :
 - aleatorio \longrightarrow stima statistica
 - componenti limitate
 - energia limitata $\left. \vphantom{\begin{matrix} - componenti limitate \\ - energia limitata \end{matrix}} \right\} \longrightarrow \text{stima Set Membership}$

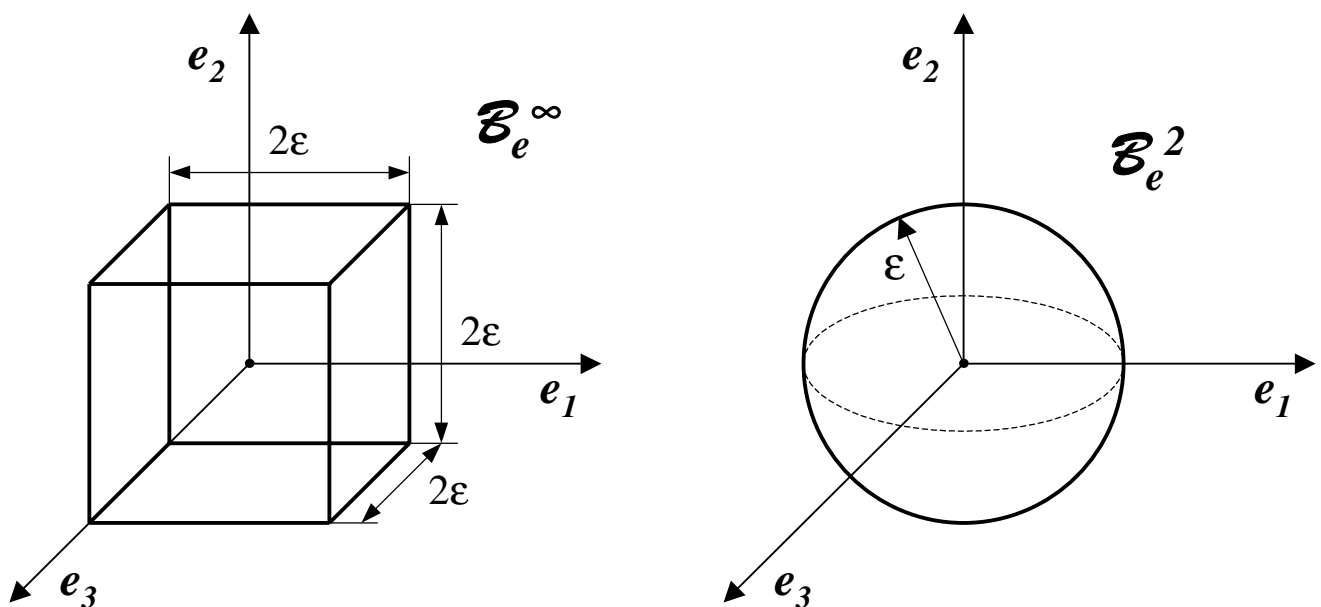


Errori a incertezza limitata (Unknown But Bounded, UBB)

$e \in \mathcal{B}_e =$ insieme di incertezza

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_e^\infty &= \left\{ \tilde{e} \in \mathcal{R}^N : |\tilde{e}_i| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, N \right\} = \\ &= \left\{ \tilde{e} \in \mathcal{R}^N : \|\tilde{e}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |\tilde{e}_i| \leq \varepsilon \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_e^2 &= \left\{ \tilde{e} \in \mathcal{R}^N : \tilde{e}^T \cdot \tilde{e} = \sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^2 \leq \varepsilon^2 \right\} = \\ &= \left\{ \tilde{e} \in \mathcal{R}^N : \|\tilde{e}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^2} \leq \varepsilon \right\}\end{aligned}$$



- **Ipotesi:** \mathcal{B}_e è simmetrico rispetto all'origine di \mathcal{R}^N



- **Problema:** l'insieme di incertezza \mathcal{B}_e induce incertezza sulla stima $\hat{\nu}$, che perciò deve essere valutata

$$A = (L^T L)^{-1} L^T = \text{operatore dei minimi quadrati} : \underbrace{\mathbb{R}^N}_{\text{spazio delle misure}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^r}_{\text{spazio dei parametri}}$$

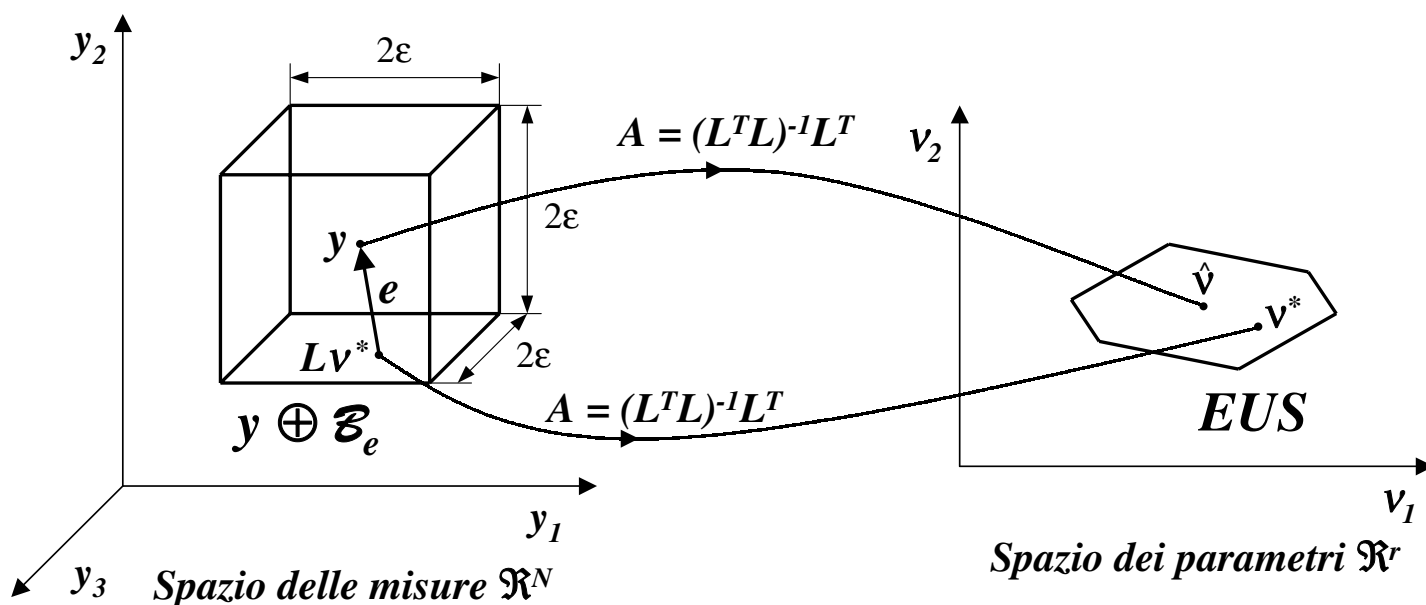
$$\hat{\nu} - \nu^* = (L^T L)^{-1} L^T e = Ae$$

⇓

$$\nu^* = \hat{\nu} - Ae$$

⇓

$$\begin{aligned} \nu^* \in EUS &= \hat{\nu} \oplus A[\mathcal{B}_e] = Ay \oplus A[\mathcal{B}_e] = A[y \oplus \mathcal{B}_e] = \\ &= \text{insieme delle stime possibili} \\ &(\text{Estimate Uncertainty Set}) \end{aligned}$$



Si noti che $\nu^* \in EUS$ e che la distanza di $L\nu^*$ da y è in norma non superiore ad ε



- L'“ampiezza” di EUS è una misura della “bontà” della stima
- In particolare, gli **intervalli di incertezza delle stime** (**E**stimate **U**ncertainty **I**ntervals) $EUI_j, j = 1, \dots, r$, forniscono una tale misura:

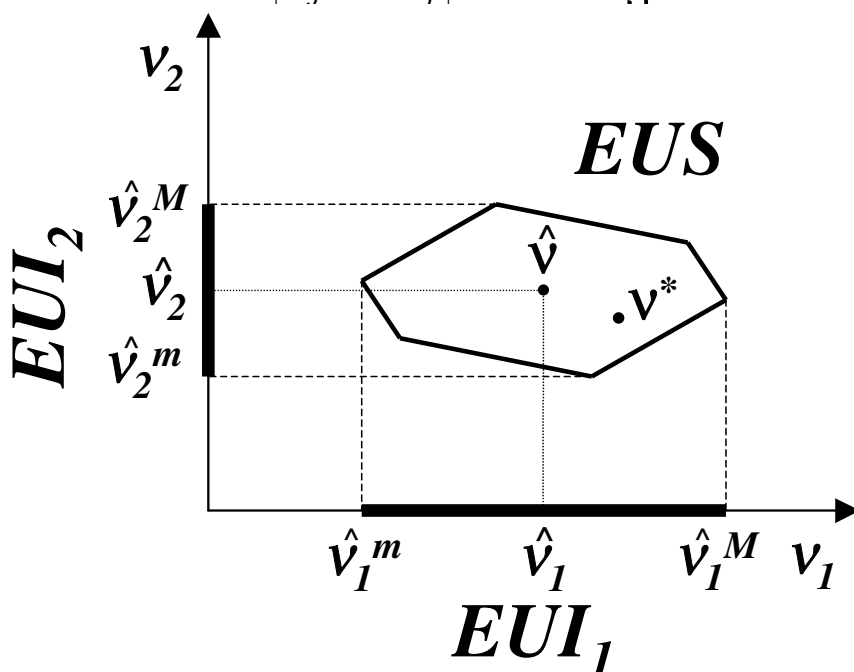
$$EUI_j = \left[\underbrace{\min_{\nu \in EUS} \nu_j}_{\hat{\nu}_j^m}, \underbrace{\max_{\nu \in EUS} \nu_j}_{\hat{\nu}_j^M} \right] = [\hat{\nu}_j^m, \hat{\nu}_j^M] \subset \mathbb{R}$$

– l'intervallo di variazione della componente j -esima della stima è tale che:

$$\hat{\nu}_j^m \leq \nu_j^* \leq \hat{\nu}_j^M$$

– un limite superiore dell'errore di stima della componente j -esima è:

$$|\hat{\nu}_j - \nu_j^*| \leq \frac{\hat{\nu}_j^M - \hat{\nu}_j^m}{2}$$



EUS ha $\hat{\nu}$ come centro di simmetria, essendo l'immagine di un insieme simmetrico secondo un operatore lineare



Determinazione di EUS^∞

- L'insieme di incertezza è un cubo in \mathbb{R}^N centrato nell'origine:

$$\mathcal{B}_e^\infty = \{ \tilde{e} \in \mathbb{R}^N : |\tilde{e}_i| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, N \}$$

$$\Downarrow \quad y = L\nu^* + e$$

l'insieme delle misure ammissibili (Measurement Uncertainty Set) è un cubo in \mathbb{R}^N avente come centro di simmetria il vettore dei dati y :

$$MUS^\infty = y \oplus \mathcal{B}_e^\infty =$$

$$= \{ \tilde{y} \in \mathbb{R}^N : |\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, N \} \subset \mathbb{R}^N$$

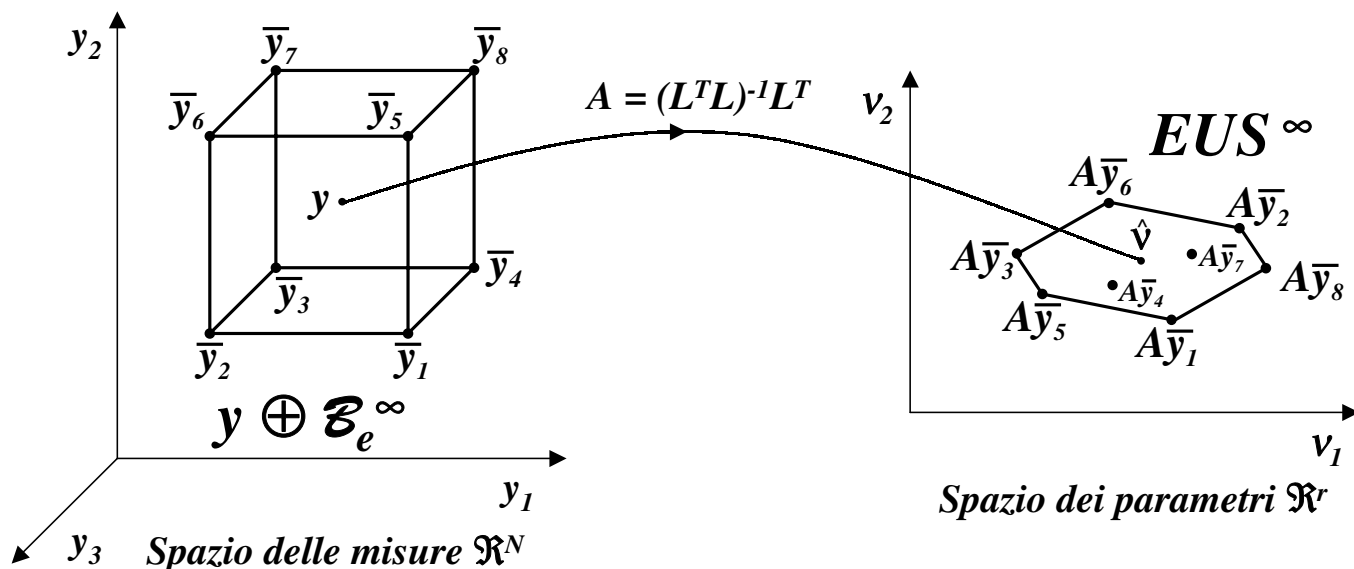
i vertici di MUS^∞ sono $\bar{y}_k, k = 1, \dots, 2^N$

- **Teorema:**

$$EUS^\infty = A [y \oplus \mathcal{B}_e^\infty] = \text{conv} \{ A\bar{y}_k, k = 1, \dots, 2^N \} \subset \mathbb{R}^r$$

$\text{conv} \{ \nu_1, \dots, \nu_p \}$: *convex hull* dell'insieme di elementi $\{ \nu_1, \dots, \nu_p \}$,

è il più piccolo poliedro convesso (politopo) contenente ν_1, \dots, ν_p





Determinazione di EUI_j^∞

• **Teorema:**

$$EUI_j^\infty = [\hat{\nu}_j^m, \hat{\nu}_j^M] \subset \mathfrak{R}$$

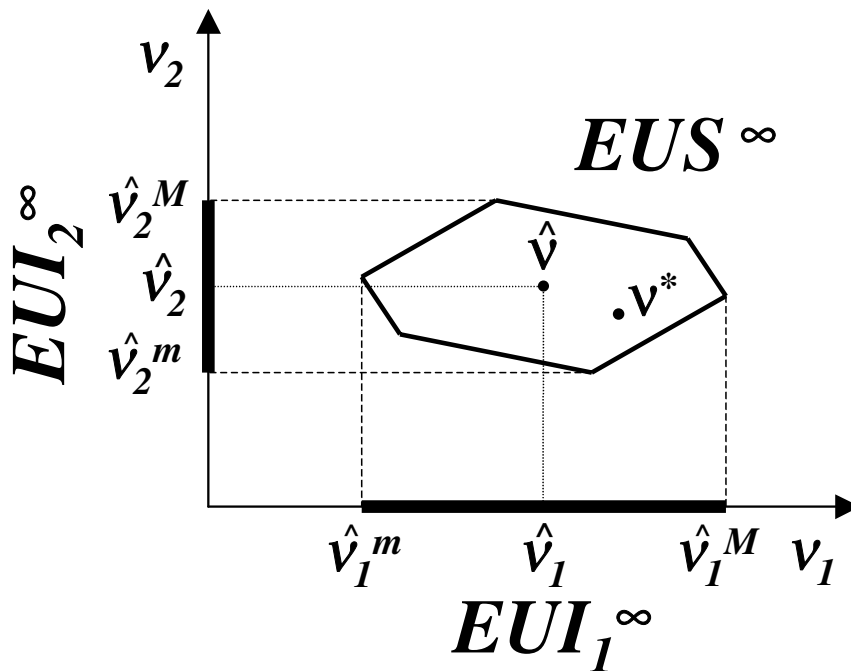
$$\hat{\nu}_j^m = \sum_{k=1}^N a_{jk} [y_k - \varepsilon \cdot \text{sign}(a_{jk})]$$

$$\hat{\nu}_j^M = 2\hat{\nu}_j - \hat{\nu}_j^m$$

essendo

$$A = [a_{jk}] = (L^T L)^{-1} L^T$$

$$\hat{\nu} = [\hat{\nu}_j] = Ay$$



Dimostrazione

$$\hat{\nu}_j^m = \min_{\nu \in EUS^\infty} \nu_j = \min_{\tilde{y} \in MUS^\infty} (A\tilde{y})_j = \min_{\substack{\tilde{y} : |\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon, \\ i=1, \dots, N}} \sum_{k=1}^N a_{jk} \tilde{y}_k = \min_{\substack{\tilde{y} : -\varepsilon \leq \tilde{y}_i - y_i \leq \varepsilon, \\ i=1, \dots, N}} \sum_{k=1}^N a_{jk} \tilde{y}_k = \min_{\substack{\tilde{y} : y_i - \varepsilon \leq \tilde{y}_i \leq y_i + \varepsilon, \\ i=1, \dots, N}} \sum_{k=1}^N a_{jk} \tilde{y}_k$$

Tale minimo è allora raggiunto ponendo $\tilde{y}_k = y_k - \varepsilon$ nel caso $a_{jk} > 0$, oppure $\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon$ nel caso $a_{jk} < 0$.

D'altra parte, poiché $MUS^\infty = y \oplus \mathcal{B}_\varepsilon^\infty$ è simmetrico rispetto al vettore dei dati y , $EUS^\infty = A[y \oplus \mathcal{B}_\varepsilon^\infty]$ risulta simmetrico rispetto alla stima $\hat{\nu} = Ay$ e quindi:

$$\hat{\nu}_j = \frac{\hat{\nu}_j^m + \hat{\nu}_j^M}{2}, j = 1, \dots, r$$

da cui segue l'enunciato del teorema ■

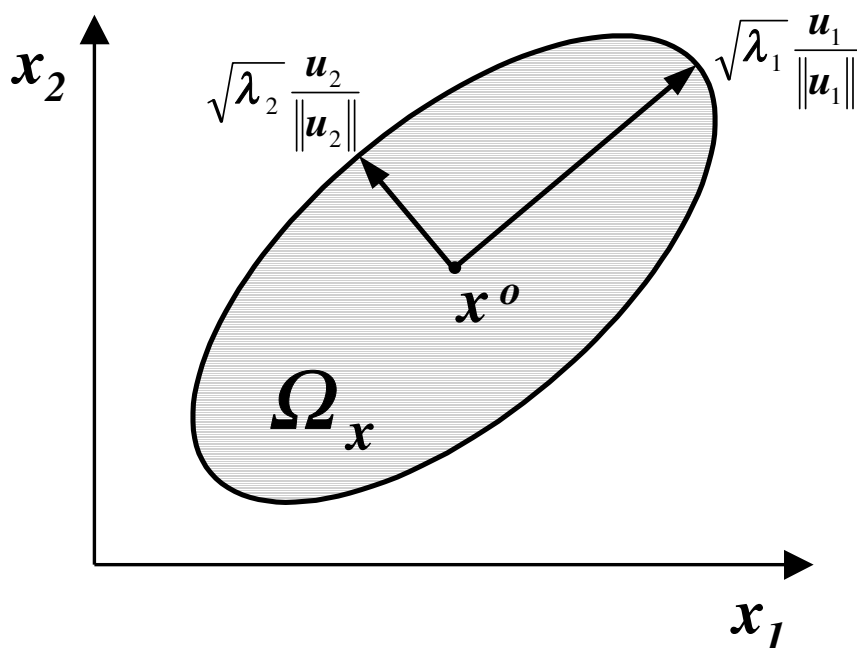


Descrizione di ellissoidi

Sia Ω_x un ellissoide centrato in x^o :

$$\Omega_x = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : (x - x^o)^T \Sigma_x^{-1} (x - x^o) \leq 1 \right\}$$

- La matrice di forma $\Sigma_x \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ è simmetrica e definita positiva, e quindi è invertibile
- La direzione degli assi principali di Ω_x è data dagli autovettori u_i di Σ_x , ortogonali fra loro essendo Σ_x definita positiva
- La lunghezza dei semiassi di Ω_x è data da $\sqrt{\lambda_i(\Sigma_x)}$, essendo $\lambda_i(\Sigma_x)$ l' i -esimo autovalore di Σ_x





Trasformazione lineare di ellissoidi

Sia Ω_x un ellissoide in \mathbb{R}^n centrato in x^o :

$$\Omega_x = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x^o)^T \Sigma_x^{-1} (x - x^o) \leq \varepsilon^2\}$$

e sia data la trasformazione lineare

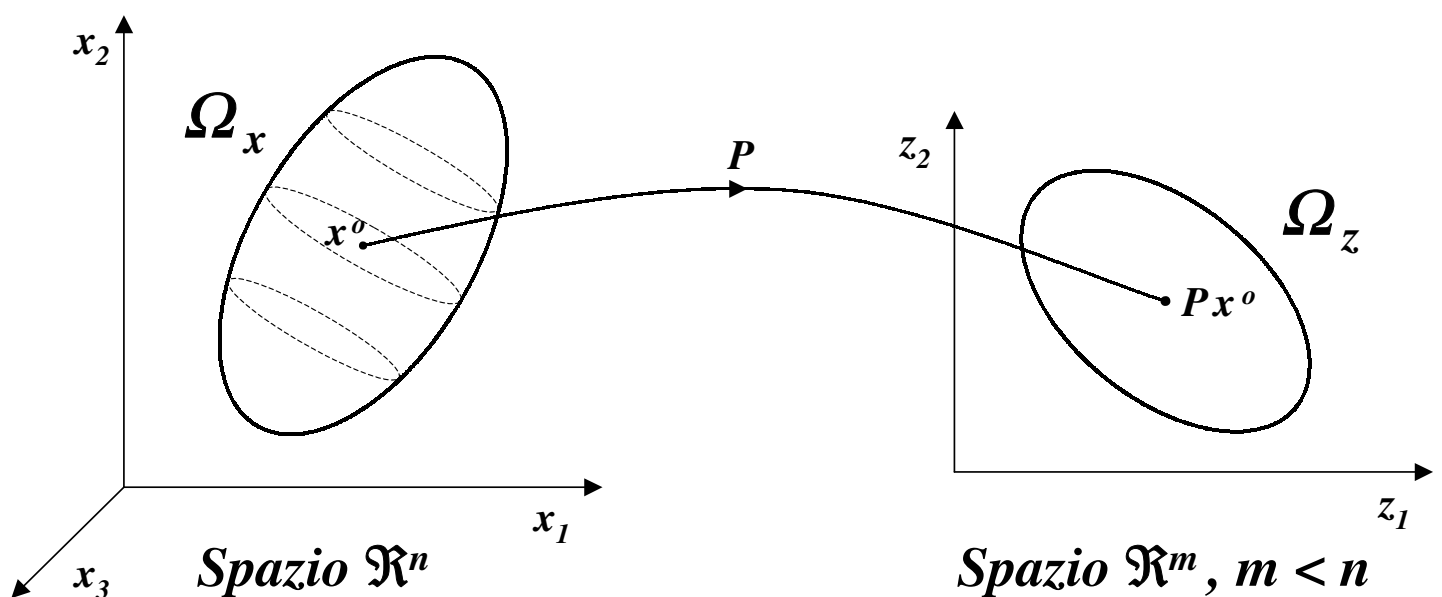
$$z = Px \in \mathbb{R}^m, \text{ con } P \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$$

- **Teorema:** se $\text{rango}(P) = m$,

$$\Omega_z = P[\Omega_x] = \{z \in \mathbb{R}^m : (z - z^o)^T \Sigma_z^{-1} (z - z^o) \leq \varepsilon^2\}$$

$$z^o = Px^o \in \mathbb{R}^m$$

$$\Sigma_z = P\Sigma_x P^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$$





Determinazione di EUS^2

- L'insieme di incertezza è una sfera in \mathfrak{R}^N centrata nell'origine:

$$\mathcal{B}_e^2 = \{\tilde{e} \in \mathfrak{R}^N : \tilde{e}^T \cdot \tilde{e} \leq \varepsilon^2\}$$

$$\Downarrow \quad y = Lv^* + e$$

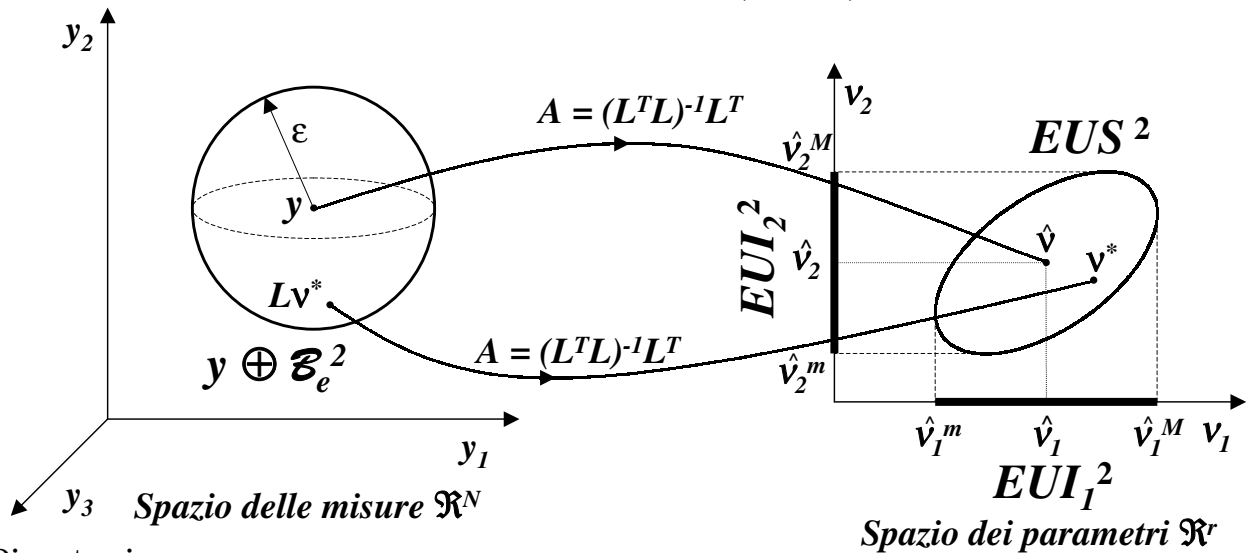
l'insieme delle misure ammissibili è una sfera in \mathfrak{R}^N avente come centro di simmetria il vettore dei dati y :

$$MUS^2 = y \oplus \mathcal{B}_e^2 = \{\tilde{y} \in \mathfrak{R}^N : (\tilde{y} - y)^T \cdot (\tilde{y} - y) \leq \varepsilon^2\} \subset \mathfrak{R}^N$$

- **Teorema:**

$$EUS^2 = A[y \oplus \mathcal{B}_e^2] = \{\tilde{v} \in \mathfrak{R}^r : (\tilde{v} - \hat{v})^T L^T L (\tilde{v} - \hat{v}) \leq \varepsilon^2\} \subset \mathfrak{R}^r$$

è un ellissoide in \mathfrak{R}^r avente come centro di simmetria la stima $\hat{v} = Ay$ e come matrice di forma $(L^T L)^{-1}$



Dimostrazione

Per definizione, EUS^2 è la trasformazione lineare del $MUS^2 = y \oplus \mathcal{B}_e^2$ applicando la matrice di trasformazione A :

$$EUS^2 = A[y \oplus \mathcal{B}_e^2] = \{\tilde{v} \in \mathfrak{R}^r : (\tilde{v} - Ay)^T [AA^T]^{-1} (\tilde{v} - Ay) \leq \varepsilon^2\}$$

Ma $Ay = \hat{v}$, $A = (L^T L)^{-1} L^T$ e quindi:

$$AA^T = (L^T L)^{-1} L^T [(L^T L)^{-1} L^T]^T = (L^T L)^{-1} L^T \left\{ L [(L^T L)^{-1}]^T \right\} = \underbrace{(L^T L)^{-1} L^T L}_{I} [(L^T L)^T]^{-1} = (L^T L)^{-1}$$

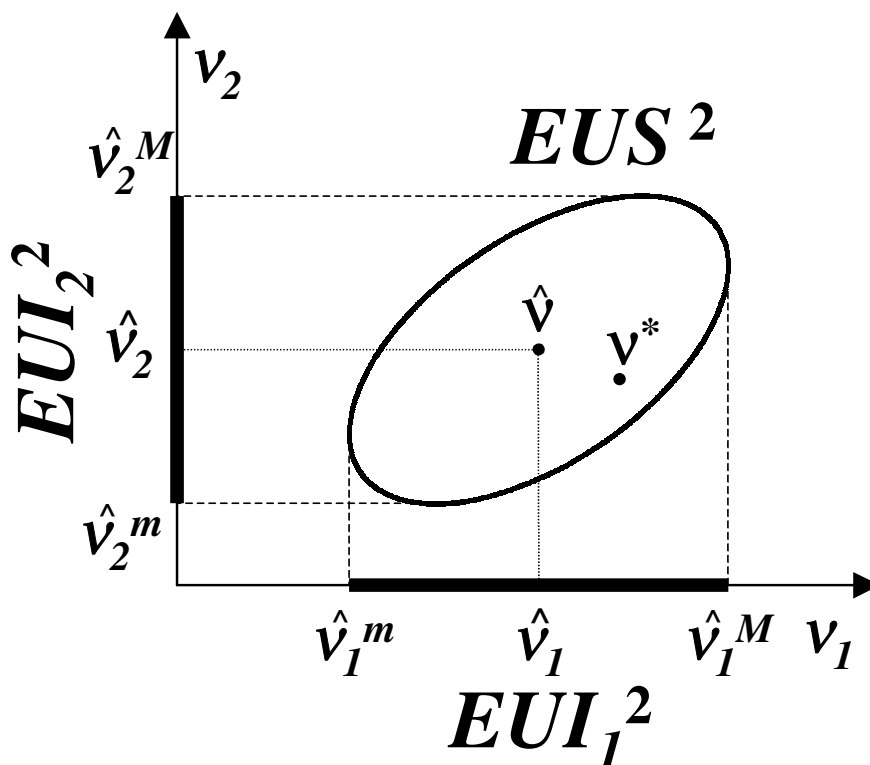


Determinazione di EUI_j^2

• Teorema:

$$EUI_j^2 = \left[\underbrace{\hat{v}_j - \varepsilon \cdot \sigma_j}_{\hat{v}_j^m}, \underbrace{\hat{v}_j + \varepsilon \cdot \sigma_j}_{\hat{v}_j^M} \right] = [\hat{v}_j^m, \hat{v}_j^M] \subset \mathfrak{R}$$

$$\sigma_j = \sqrt{\left[(L^T L)^{-1} \right]_{jj}}$$





Stime ottime (a minima incertezza)

- EUS è il più piccolo insieme contenente il parametro “vero” ν^* ?
- Gli EUI_j sono i più piccoli intervalli di incertezza possibili?
- Lo stimatore ai minimi quadrati è proprio quello che fornisce gli intervalli di incertezza minimi?

La risposta può essere ottenuta andando a studiare l’insieme dei “parametri compatibili” con i dati e con le informazioni sul rumore

- **Definizione:** il parametro $\tilde{\nu}$ si dice **compatibile** se

$$(y - L\tilde{\nu}) \in \mathcal{B}_e$$

⇓

$$\begin{aligned} FPS &= \{\tilde{\nu} \in \mathbb{R}^r : (y - L\tilde{\nu}) \in \mathcal{B}_e\} = \\ &= \text{insieme dei parametri compatibili} \\ &\quad (\mathbf{F}easible \mathbf{P}arameter \mathbf{S}et) \text{ con i dati e con} \\ &\quad \text{le informazioni sul rumore e sul sistema} \end{aligned}$$

- FPS è indipendente dall’algoritmo di stima utilizzato
- Se i dati sono stati generati dal parametro “vero” ν^* , allora ν^* è compatibile; infatti:

$$y = L\nu^* + e, \quad e \in \mathcal{B}_e$$

⇓

$$y - L\nu^* = e \in \mathcal{B}_e$$

⇓

$$\nu^* \in FPS$$



Relazione fra FPS ed EUS

- **Teorema**

$$\boxed{FPS \subseteq EUS}$$

Dimostrazione

Se $\tilde{\nu} \in FPS$, allora

$$(y - L\tilde{\nu}) \in \mathcal{B}_e$$

$$\Downarrow$$

$$L\tilde{\nu} \in y \oplus \mathcal{B}_e$$

$$\Downarrow$$

$$A[L\tilde{\nu}] \in A[y \oplus \mathcal{B}_e] = EUS$$

Ma $A[L\tilde{\nu}] = (L^T L)^{-1} L^T [L\tilde{\nu}] = \tilde{\nu}$ e quindi

$$\tilde{\nu} \in EUS$$

■

- Similmente agli EUI_j , si possono definire gli **intervalli di incertezza dei parametri compatibili** PUI_j , $j = 1, \dots, r$ (**P**arameter **U**ncertainty **I**ntervals):

$$PUI_j = \left[\underbrace{\min_{\nu \in FPS} \nu_j}_{\nu_j^m}, \underbrace{\max_{\nu \in FPS} \nu_j}_{\nu_j^M} \right] = [\nu_j^m, \nu_j^M] \subset \mathfrak{R}$$

dal teorema precedente:

$$PUI_j \subseteq EUI_j, \quad j = 1, \dots, r$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\nu}_j^m \leq \nu_j^m \leq \nu_j^* \leq \nu_j^M \leq \hat{\nu}_j^M$$



Determinazione di FPS^∞ e di PUI_j^∞

- Se $\tilde{\nu} \in FPS^\infty$, allora

$$(y - L\tilde{\nu}) \in \mathcal{B}_\varepsilon^\infty = \{\tilde{e} \in \mathbb{R}^N : |\tilde{e}_i| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, N\}$$

$$\Downarrow \quad l_i : i\text{-esima riga di } L$$

$$|(y - L\tilde{\nu})_i| = |y_i - l_i\tilde{\nu}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Downarrow$$

$$FPS^\infty = \{\tilde{\nu} \in \mathbb{R}^r : |y_i - l_i\tilde{\nu}| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, N\}$$

cioè l'insieme dei parametri compatibili è un politopo (ossia un poliedro convesso) generato da disuguaglianze lineari:

$$\begin{aligned} |y_i - l_i\tilde{\nu}| \leq \varepsilon & \iff -\varepsilon \leq y_i - l_i\tilde{\nu} \leq \varepsilon & \iff \\ & \iff y_i - \varepsilon \leq l_i\tilde{\nu} \leq y_i + \varepsilon \end{aligned}$$

- Inoltre:

$$PUI_j^\infty = \left[\underbrace{\min_{\nu \in FPS^\infty} \nu_j}_{\nu_j^m}, \underbrace{\max_{\nu \in FPS^\infty} \nu_j}_{\nu_j^M} \right] = [\nu_j^m, \nu_j^M] \subset \mathbb{R}$$

dove ν_j^m e ν_j^M sono le soluzioni di problemi di programmazione lineare del tipo standard:

$$\min_x c^T x \quad \text{con il vincolo: } Ax \leq b$$



Determinazione di FPS^2 e di PUI_j^2

- **Teorema**

$$FPS^2 = \{ \tilde{\nu} \in \mathfrak{R}^r : (\tilde{\nu} - \hat{\nu})^T [L^T L] (\tilde{\nu} - \hat{\nu}) \leq \varepsilon^2 - \alpha^2 \}$$

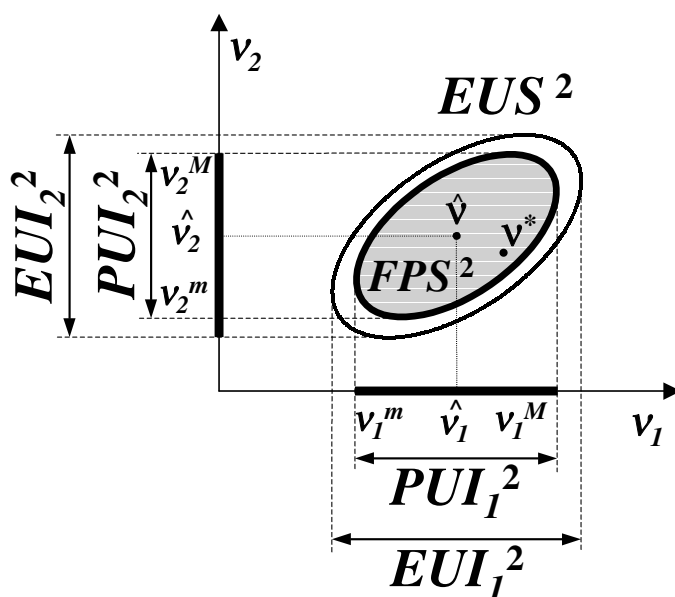
$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (y - L\hat{\nu})^T (y - L\hat{\nu}) = \|y - L\hat{\nu}\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \\ &= \text{errore tra le uscite misurate e quelle stimate,} \\ &\quad \text{detto anche "errore di fitting"} \end{aligned}$$

- tanto maggiore è l'errore di fitting,
tanto più piccolo è FPS^2 ,
tanto minore è l'incertezza sui parametri!!

- Inoltre:

$$PUI_j^2 = \left[\underbrace{\hat{\nu}_j - \sigma_j \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}}_{\nu_j^m}, \underbrace{\hat{\nu}_j + \sigma_j \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}}_{\nu_j^M} \right] \subset \mathfrak{R}$$

$$\sigma_j = \sqrt{[(L^T L)^{-1}]_{jj}}$$





Stime ottime

- **Definizione:** l'errore di una stima $\hat{\nu}$ è:

$$E(\hat{\nu}) = \sup_{\nu \in FPS} \|\nu - \hat{\nu}\|$$

- **Definizione:** una stima $\hat{\nu}^o$ è **ottima** se:

$$E(\hat{\nu}^o) \leq E(\hat{\nu}), \quad \forall \hat{\nu} \in \mathfrak{R}^r$$

- Stima ai minimi quadrati:

$$\hat{\nu}^{LS} = (L^T L)^{-1} L^T y$$

- Stima centrale:

$$\hat{\nu}^C = [\hat{\nu}_j^C]$$
$$\hat{\nu}_j^C = \frac{\nu_j^m + \nu_j^M}{2}, \quad j = 1, \dots, r$$

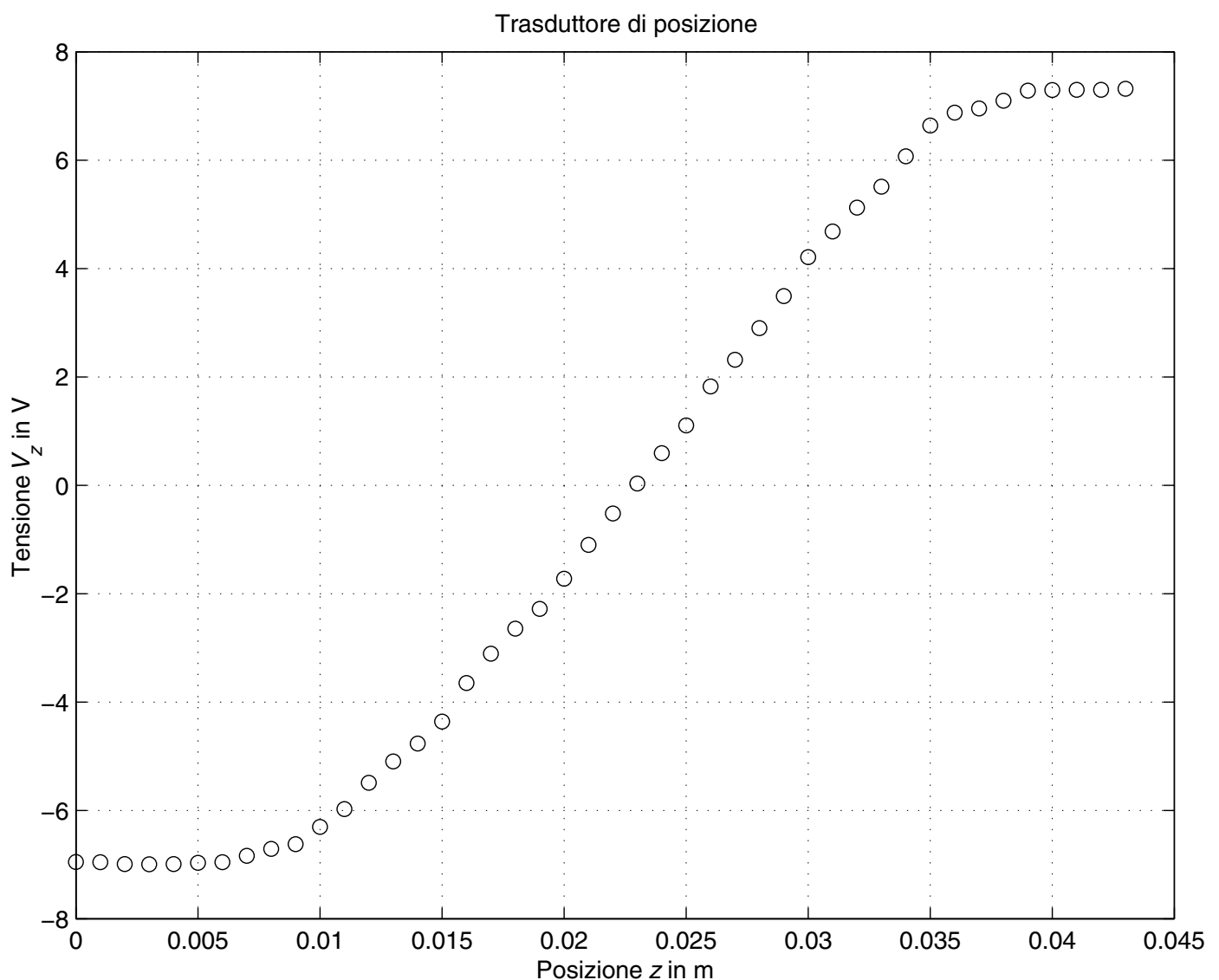
– la stima centrale è ottima sia nel caso $\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_e^\infty$ sia nel caso $\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_e^2$; infatti:

$$|\nu_j^* - \hat{\nu}_j^C| \leq \frac{\nu_j^M - \nu_j^m}{2}, \quad j = 1, \dots, r$$

– nel caso $\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_e^2$, la stima ai minimi quadrati è centrale e quindi ottima



Esempio: identificazione del modello di un trasduttore di posizione



la caratteristica statica posizione-tensione del trasduttore è circa lineare nell'intervallo fra 1.3 e 3.5 cm



approssimazione lineare della caratteristica posizione-tensione:

$$V_z = K_t \cdot z + V_o$$



- Nell'intervallo di linearità:

$$V_z = \underbrace{K_t}_{\text{incognita}} \cdot z + \underbrace{V_o}_{\text{incognita}}$$

- l'errore più rilevante è compiuto nella lettura della posizione z (pari al massimo a circa 0.5 mm)

⇓

per tener conto anche dell'errore di misura e , l'equazione del modello è riscritta come:

$$z = \frac{1}{K_t} \cdot V_z - \frac{V_o}{K_t} + e$$

in cui i parametri incogniti sono

$$\nu_1 = \frac{1}{K_t}, \quad \nu_2 = -\frac{V_o}{K_t}$$

- le N misure effettuate in regime di linearità sono:

$$z_1 = V_{z,1} \cdot \nu_1 + \nu_2 + e_1$$

$$z_2 = V_{z,2} \cdot \nu_1 + \nu_2 + e_2$$

⋮

$$z_N = V_{z,N} \cdot \nu_1 + \nu_2 + e_N$$

$V_{z,i}$: tensione fornita dal trasduttore in corrispondenza della posizione z_i



- In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{z,1} & 1 \\ V_{z,2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ V_{z,N} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

cioè nella forma:

$$z^N = L \cdot \nu + e^N$$

dove $z^N \in \mathfrak{R}^N$, $L \in \mathfrak{R}^{N \times 2}$, $e^N \in \mathfrak{R}^N$ e l'incognita è $\nu \in \mathfrak{R}^2$

- Stimando ν con l'algoritmo dei minimi quadrati:

$$\hat{\nu} = A \cdot z^N, \quad \text{con } A = (L^T \cdot L)^{-1} L^T$$

↓

$$\hat{\nu} = \begin{bmatrix} \hat{\nu}_1 \\ \hat{\nu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8194 \cdot 10^{-3} \\ 2.2791 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{K}_t = \frac{1}{\hat{\nu}_1} = 549.62 \text{ V/m}, \quad \hat{V}_o = -\frac{\hat{\nu}_2}{\hat{\nu}_1} = -12.526 \text{ V}$$



Determinazione degli intervalli di incertezza delle stime EUI_j^∞

$$e^N \in \mathcal{B}_e^\infty = \{\tilde{e}^N \in \mathfrak{R}^N : |\tilde{e}_k| \leq \varepsilon, k = 1, \dots, N\}, \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$$

↓

$$EUI_j^\infty = \left[\hat{\nu}_j^m = \min_{\nu \in EUS^\infty} \nu_j, \hat{\nu}_j^M = \max_{\nu \in EUS^\infty} \nu_j \right], \quad j = 1, 2$$

$$\hat{\nu}_j^m = \min_{\nu \in EUS^\infty} \nu_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \cdot [z_k - \varepsilon \cdot \text{sign}(a_{jk})]$$

$$\hat{\nu}_j^M = \max_{\nu \in EUS^\infty} \nu_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \cdot [z_k + \varepsilon \cdot \text{sign}(a_{jk})] = 2 \cdot \hat{\nu}_j - \hat{\nu}_j^m$$

↓

$$[\hat{\nu}_1^m, \hat{\nu}_1^M] = [1.6996 \cdot 10^{-3}, 1.9392 \cdot 10^{-3}]$$

$$[\hat{\nu}_2^m, \hat{\nu}_2^M] = [2.2291 \cdot 10^{-2}, 2.3291 \cdot 10^{-2}]$$

↓

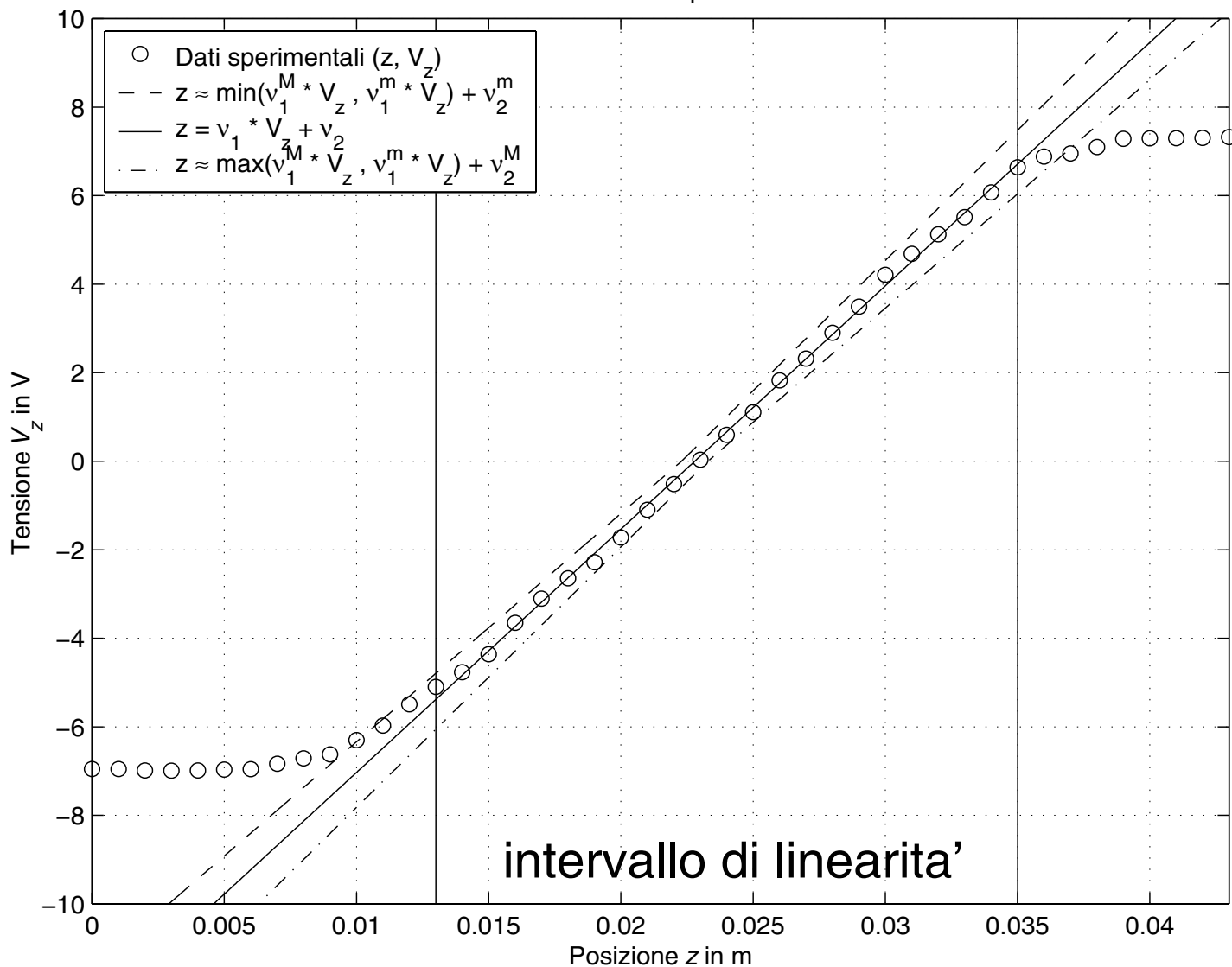
$$[\hat{K}_t^m, \hat{K}_t^M] = \left[\frac{1}{\hat{\nu}_1^M}, \frac{1}{\hat{\nu}_1^m} \right] = [515.67, 588.36] \text{ V/m}$$

$$[\hat{V}_o^m, \hat{V}_o^M] = \left[-\frac{\hat{\nu}_2^M}{\hat{\nu}_1^m}, -\frac{\hat{\nu}_2^m}{\hat{\nu}_1^M} \right] = [-13.703, -11.495] \text{ V}$$



Inviluppo dell'insieme di modelli i cui parametri \hat{v} appartengono agli estremi degli intervalli di incertezza $EUI_j^\infty, j = 1, 2$

Trasduttore di posizione





Determinazione degli intervalli di incertezza dei parametri compatibili PUI_j^∞

$$FPS^\infty = \left\{ \tilde{\nu} \in \mathfrak{R}^{dim(\tilde{\nu})} : |z_k - [L \cdot \tilde{\nu}]_k| \leq \varepsilon, k = 1, \dots, N \right\}$$

$$PUI_j^\infty = \left[\min_{\nu \in FPS^\infty} \nu_j, \max_{\nu \in FPS^\infty} \nu_j \right] \subseteq EUI_j^\infty, \quad j = 1, 2$$

Gli estremi degli intervalli PUI_j^∞ si ricavano come soluzione di problemi di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min_{\nu \in FPS^\infty} \nu_j &= \min_{M \cdot \nu \leq b} c^T \cdot \nu \\ \max_{\nu \in FPS^\infty} \nu_j &= - \min_{M \cdot \nu \leq b} (-c)^T \cdot \nu \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} L \\ -L \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} z^N \\ -z^N \end{bmatrix} + \varepsilon, \quad c = j\text{-esima colonna di } I_{2 \times 2}$$

⇓

$$\begin{aligned} \left[\min_{\nu \in FPS^\infty} \nu_1, \max_{\nu \in FPS^\infty} \nu_1 \right] &= [1.7909 \cdot 10^{-3}, 1.8484 \cdot 10^{-3}] \\ \left[\min_{\nu \in FPS^\infty} \nu_2, \max_{\nu \in FPS^\infty} \nu_2 \right] &= [2.2596 \cdot 10^{-2}, 2.2807 \cdot 10^{-2}] \end{aligned}$$

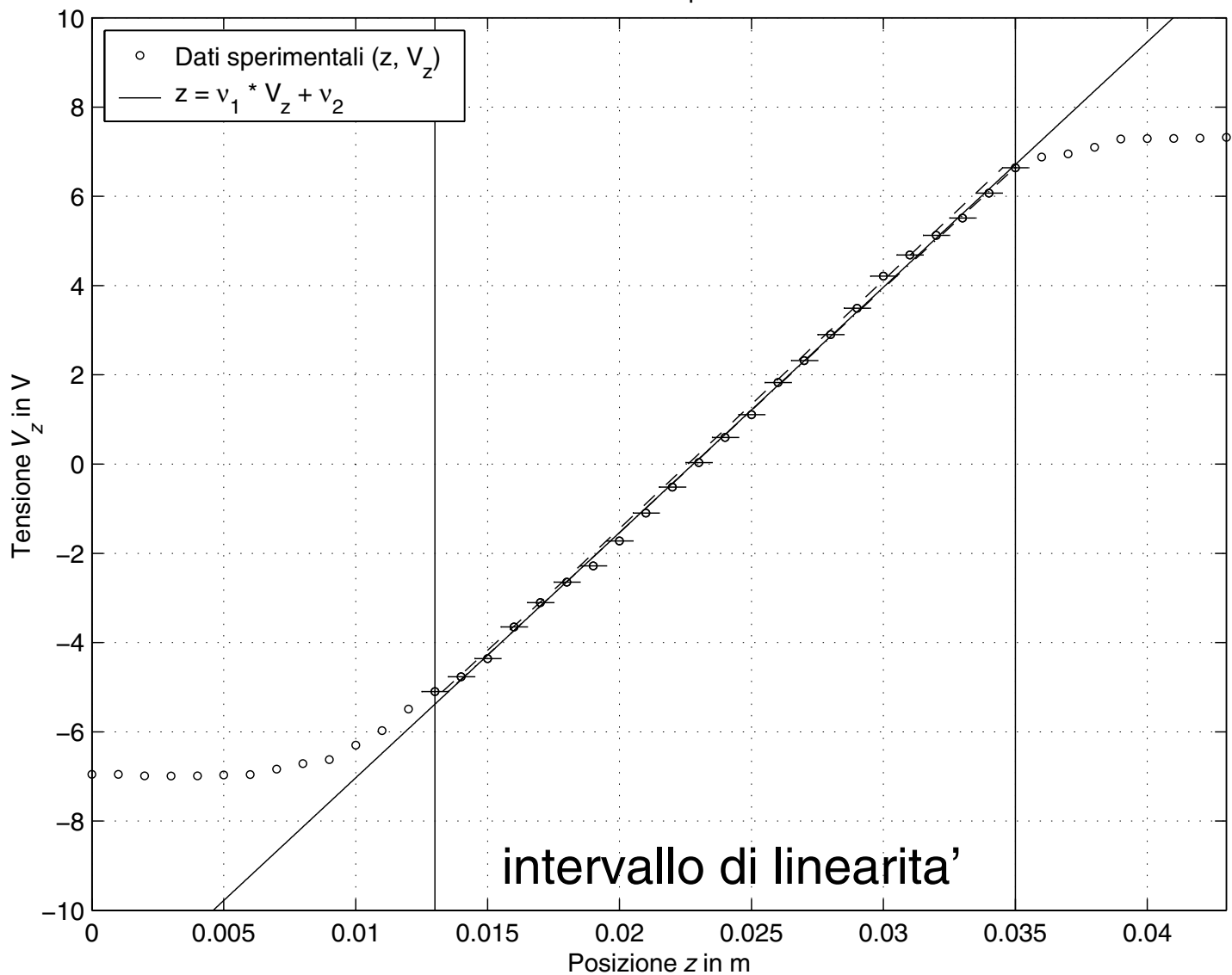
⇓

$$\begin{aligned} \left[\hat{K}_t^m, \hat{K}_t^M \right] &= [541.01, 558.38] \text{ V/m} \\ \left[\hat{V}_o^m, \hat{V}_o^M \right] &= [-12.735, -12.225] \text{ V} \end{aligned}$$



Inviluppo dell'insieme di modelli i cui parametri \hat{v} appartengono all'insieme dei parametri compatibili FPS^∞

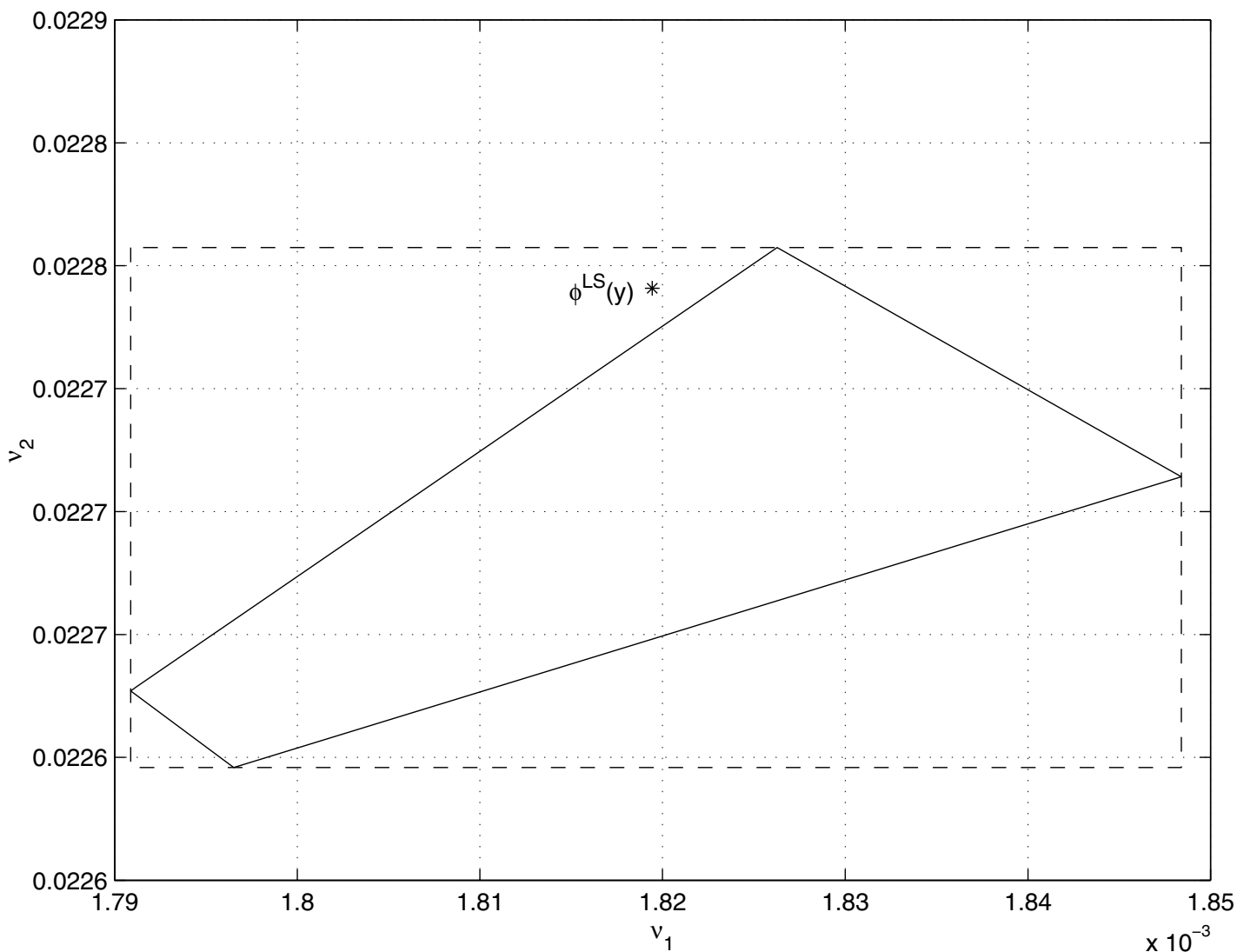
Trasduttore di posizione





Insieme dei parametri compatibili FPS^∞ (linea continua) e regione individuata dagli estremi degli intervalli di incertezza dei parametri compatibili $PUI_j^\infty, j = 1, 2$

Insieme dei parametri compatibili FPS_∞





Bibliografia essenziale

- F. C. Schweppe, *Uncertain Dynamics Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1973.
- M. Milanese, R. Tempo, A. Vicino (editors), *Robustness in Identification and Control*. New York: Plenum Press, 1989.
- M. Milanese, A. Vicino, “Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty: an overview,” *Automatica*, vol. 27, no. 6, pp. 997–1009, 1991.
- Special Issue on System Identification for Robust Control Design, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-37, no. 7, pp. 899–974, 1992.
- R. S. Smith, M. Dahleh (editors), *The Modeling of Uncertainty in Control Systems*, vol. 192 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. London, UK: Springer-Verlag, 1994.
- M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, É. Walter (editors), *Bounding Approaches to System Identification*. New York: Plenum Press, 1996.
- J. R. Partington, *Interpolation, Identification, and Sampling*, vol. 17 of *London Mathematical Society Monographs New Series*. New York: Clarendon Press - Oxford, 1997.
- A. Garulli, A. Tesi, A. Vicino (editors), *Robustness in Identification and Control*, vol. 245 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Godalming, UK: Springer-Verlag, 1999.
- J. Chen, G. Gu, *Control-Oriented System Identification: An H_∞ Approach*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.